

Livförsäkringsmatematik – andra upplagan

Inledning

Litteraturen för inledande kurser inom livförsäkring på svenska högskolor och universitet har, på grund av den omfattande utvecklingen i livförsäkringsbranschen i Sverige under senare tid, kommit att uppvisa ett allt större behov av att moderniseras. Den grundläggande livförsäkringsmatematiken består men utvecklingen av produkter och delar av regelverket för att bedriva livförsäkring har ändrats så pass mycket att behovet att revidera och komplettera befintlig litteratur blivit mer och mer nödvändigt.

Den här boken är andra upplagan av en bok som gavs ut 2005 med samma namn, *Livförsäkringsmatematik*. Föreliggande bok är ordentligt utökad, bland annat har modernare metoder för utjämning av observerad dödlighet och nya tabeller över livslängder för befolkningen lagts till. Dessa tabeller är ett utdrag av det SCB publicerade under våren 2013 avseende befolkningen 2012.

Syftet med boken är även att modernisera kurslitteraturen och samtidigt samla de grundläggande begreppen för livförsäkringsmatematik på ett ställe. Moderniseringen har samtidigt inneburit att det blivit en naturlig anpassning till det idag gällande regelverket. Med andra ord ligger i skrivandet av denna bok en from förhoppning till att boken även skall utgöra ett pedagogiskt bidrag till redan existerande litteratur inom detta område.

Det är förhållandevis gott om litteratur som beskriver de grundläggande elementen inom livförsäkringsmatematik. Denna bok gör som sagt inte speciellt anspråk på att utveckla den delen av teorin. Däremot kan man konstatera att befintlig litteratur ofta har, på grund av sitt speciella beteckningssystem, varit svåråtkomligt. I den här boken har vi frångått detta beteckningssystem. Tanken är att läsaren, efter att ha en grundläggande kunskap i ämnet matematisk statistik, skall kunna läsa denna bok med god behållning. Förhoppningen är också att de nymodigheter som introduceras i den här boken skall ses som en utveckling av ämnet på sikt.

Boken är tänkt att ersätta tidigare kurslitteratur som används i kursen Livförsäkringsmatematik I som ges vid Stockholms universitet.

En viktig tanke vid skrivandet av denna bok har varit att den skall vara relativt lättillgänglig för läsaren vad avser de matematiska resonemangen. Ambitionen har därför varit att förklara vissa matematiska resonemang mer än vad som i vissa fall kan anses vara njutbart.

Syftet är också att man efter att ha läst denna bok skall ha fått en uppfattning om hur teorin praktiskt tillämpas inom livförsäkringsbranschen. För att få en djupare förståelse för andra också mycket viktiga områden, till exempel försäkringsekonomi, återbäringsfrågor och vinstdelning hänvisas till annan litteratur inom området.

Ränteberäkning

Boken inleds med ett kapitel om ränteberäkning. Man kan säga att grundtemat inom livförsäkring är diskontering av betalningsströmmar, där diskonteringen görs dels med avseende på ränta och dels med avseende på dödlighet. För att ge läsaren nödvändiga verktyg inom ränteberäkning ges en översiktlig introduktion. Särskilt viktiga är begreppen *sammansatt ränta*, *diskontering* och *annuitet*.

Hela boken bygger på så kallad kontinuerlig teknik vilket har varit en svensk tradition under mycket lång tid. Det får som konsekvens att all teori ges i kontinuerlig tappning. Man kan säga att nackdelen är att man ges inte direkt formler att tillämpa i konkreta fall utan man måste konvertera den kontinuerliga tekniken till diskret teknik. Orsaken till att kontinuerlig teknik används är naturligtvis traditionen som i sin tur bygger på det ställningstagandet att det ger en bra beskrivning av teorin och resultaten skymms inte av förhållandevis knöliga diskreta formler.

Modeller för livslängder

Det kanske mest centrala kapitlet i boken är det kapitel som handlar om livslängder. Den teorin finns återgiven i kapitel 2. Där beskrivs den grundläggande teorin med ett avstamp i definitioner av komponenter i den stokastiska modell som brukas i Sverige.

Traditionen i Sverige har tidigare varit att man, när man vill ange en modell för livslängdsteori, har man börjat med att ange *överlevelsefunktionen* $l(x)$. Emedan de studenter som läser den här boken efter att ha läst de grundläggande kurserna i matematisk statistik har med sig en grund av stokastiska variabler, och dess fördelningsfunktioner förvisso, känns det som naturligt att starta med att definiera en stokastisk variabel som man låter symbolisera *återstående livslängd* för en individ.

Med den definitionen är det sedan lätt att, genom att bygga på teorin för tillförlitlighetsteori, bygga upp den modell som behövs. De modeller som diskuteras i boken är parametriska modeller. Den viktigaste modellen är den så kallade Makehammodellen som också ges en omfattande beskrivning i boken. Den kanske minst lyckosamma egenskapen hos Makehammodellen är att den inte tar hänsyn till trender i dödligheten. I övrigt ger Makehammodellen en förvånansvärt god anpassning till dödligheten i olika populationer. Makehammodellen har använts under större delen av 1900-talet i Sverige och gäller fortfarande som den mest använda modellen.

På senare tid har trendmodeller av Lee-Carters typ blivit moderna vad avser parametrisk anpassning till observerad dödlighet. Populariteten kommer sig av den långsamma, men mycket närvarande, förbättringen av dödligheten i befolkningen. I boken beskrivs en variant av Lee-Carter-modellen som har använts av Försäkringstekniska forskningsnämnden (FTN) för att utjämna observerad dödlighet i svenska försäkringspopulationer. Trenden i dödligheten har skattats med hjälp av

befolkningsdödligheten sedan har en kvotmetod använts för att överföra trendinformationen till respektive försäkringspopulationer.

I kapitlet diskuteras också teorin för Lexis-diagram samt hur man konstruerar livslängdstabeller. Lexis-diagram får man i detta sammanhang se som ett pedagogiskt verktyg för illustrativa syften. Inom demografi spelar Lexisdiagrammen en större betydelse. Däremot används livslängdstabeller flitigt i livförsäkringsmatematik för att åskådliggöra utvecklingen av dödligheten inom såväl befolkningen som olika försäkringspopulationer.

Teori för ettlivsförsäkringar

Det viktigaste avsnittet i boken är kapitlet om ettlivsförsäkringar, kapitel 3. Här får vi från början lära oss hur en försäkring byggs upp i sina byggstenar. Kapitlet går igenom de kanske nio viktigaste exemplen på ettlivsförsäkring i marknaden i detalj.

Till att börja med definierar vi den betalningsström som representerar den årspremie som vi förknippar med en försäkring. Därur kan man som specialfall få engångspremien. Genom att beräkna *nuvärdet av försäkringstagarens framtida åtaganden*, vid durationen t , och ta väntevärdet av nuvärdet definierar vi det som kallas för *kapitalvärdet* av de framtida premiebetalningarna vid durationen t .

På samma sätt tittar vi sedan på försäkringsgivarens framtida åtagande vid durationen t och definierar därmed ett kapitalvärde baserat på den betalningsströmmen. Här definierar vi också en stokastisk variabel som representerar försäkringens nuvärde vid durationen t . Nuvärdet är i sig en stokastisk storhet som beror på den försäkrade individens återstående livslängd. Väntevärdet av den stokastiska variabeln beräknas och på det viset har vi skapat det som vi kallar för kapitalvärdet vid durationen t . Årspremien kan beräknas genom att sätta dessa kapitalvärden lika vid durationen $t=0$.

Kapitalvärdena, beskrivna ovan, är fundamentala byggstenar i *Thieles differentialekvation* som anger den löpande förändringen i försäkringsgivarens skuld till försäkringstagaren under försäkringstiden. På detta sätt kan vi beskriva strukturen i varje försäkring vi studerar och följa dess utveckling.

Teori för tvålivsförsäkringar

Historiskt har marknaden för tvålivsförsäkringar varit stor i Sverige. Med tiden har den marknaden emellertid krympt för att idag vara produkter som nytecknas i mycket liten omfattning. Skillnaden mot hur populära produkterna är i den anglosaxiska världen är stor. Exempelvis säljs dessa produkter mycket i Storbritannien. Trots den mycket blygsamma nyförsäljningen i Sverige kan man dock inte bortse från teorin för tvålivsförsäkringar då man studerar till aktuarie. I själva verket finns det i de större livförsäkringsbolagen fortfarande stora bestånd av tvålivsförsäkringar som måste hanteras.

I boken går vi igenom sju olika exempel där två exempel av efterlevandepensioner är centrala. Emellertid går inte de olika exemplen igenom lika noga som vi gjorde i kapitel 3 med ettlevsförsäkringar. Orsaken till det är att tvålivsförsäkringar är mycket mer komplexa till sin natur och bör specialstuderas från fall till fall då man är speciellt intresserad av en viss tvålivsförsäkring.

Livslängdstabeller enligt SCB

En viktig beståndsdel inom livförsäkringsmatematik är en livslängdstabell. Hur man konstruerar en livslängdstabell finns redogjort för i kapitel 2 i boken.

Eftersom i princip alla försäkringsbolag i Sverige har för små bestånd för att kunna göra bra skattningar av dödligheten i deras egna bestånd använder man sig ofta av erfarenheten från befolkningen. Detta gäller speciellt i låga respektive höga åldrar. Befolkningsdödligheten sammanställs och publiceras varje år genom SCBs försorg.

I den första upplagan av boken fanns livslängdstabeller över dödligheten 2002. I denna upplaga har vi för jämförelsens skull behållit dessa tabeller och kompletterat med motsvarande tabeller från 2012. Det ger en stor möjlighet att se hur dödligheten har förbättrats med tiden. Redan tio års utveckling visar på klara skillnader.

Som kuriosa har vi också lagt till motsvarande tabell från 1968. Dessa tabeller är inte konstruerade med exakt samma teknik som de nyare tabellerna är men avviker inte i någon nämnvärd omfattning.

I boken finns också färdiga tabeller över den observerade befolkningsdödligheten för femårsperioderna 1998-2002 och 2008-2012. Dessa tabeller ger en större precision vid skattning av dödligheten.

Livslängdstabeller enligt försäkringsbranschens erfarenhet

I boken finns också, i enlighet med erfarenheten inom livförsäkringsbranschen, livslängdstabeller som beskriver den utjämnade dödligheten enligt parameteruppsättningen M90. Dessa tabeller bygger på den observerade försäkringsdödligheten under främst 1980-talet. Den har sedan använts för att skatta parametrarna i en parametrisk modell som använts för att utjämna den observerade dödligheten. Denna uppsättning av skattade parametrar är ett exempel på en tillämpning av Makehams modell, diskuterad ovan, som man sedan, på grund av kopplingen till observationsperioden, gett namnet M90. M90 saknar trendfaktor vilket gör att förr eller senare blir M90 mindre användbar.

Underlaget till M90 har kommit fram genom att FTN har genomfört en stor studie, den så kallade *Grundkommittén 1989*. Fram till denna tidpunkt var branschen mer eller mindre tvingad att följa samma dödlighetsantagande. Efter det att det arbetet genomförts har man infört ett friare val av dödlighetsantagande som livförsäkringsbolagen kan använda sig av. Tabellerna i den första upplagan är kompletterade med nya tabeller i denna upplaga av boken.

Tabellerna i boken följer M90 med det ränteantagande och belastningar som Premiepensionsmyndigheten (PPM) använde sig av då. Tanken med det var att ge för branschen rimligt neutrala tabeller. Tilläggas kan också att tabellerna i boken inte tar hänsyn till den linjärisering av dödligheten som PPM har infört för åldrar över 97 år. Däremot är metoden beskriven i boken.

I den nya upplagan av boken har vi kompletterat med så kallade M12-tabeller. Dessa tabeller bygger på Pensionsmyndighetens (PM, tidigare PPM), nya antaganden om dödligheten. Dessa antaganden skiljer sig markant från M90. De utgår från SCBs erfarenhet från 2012 och sedan har man valt en anpassning som passar särskilt bra i åldersintervallet 61-90 års ålder. Tabellerna bygger också på en räntefot på 0 % till skillnad från M90-tabellerna som bygger på en räntefot på 3 %. Dessutom har också linjäriseringen tagits hänsyn till.

Generellt kan man säga att de två uppsättningarna v tabeller, M90 och M12, inte är jämförbara med varandra men speglar en utveckling i tiden som är relevant.

Utöver själva dödlighetstabellerna finns ett antal hjälptabeller med i boken. För M90 respektive M12 finns i boken tabeller över dödlighetsintensiteten, överlevelsefunktionen, förväntad återstående livslängd samt kommutationsfunktionerna D, N och M. Kommutationsfunktionerna är mycket användbara då man vill beräkna en försäkrings premie eller dess värdefunktion vid olika durationer.

Sjukförsäkring

Ett avsnitt som inte fanns i den första upplagan av denna bok är det som är tillagt i kapitel 7, sjukförsäkringar. Där diskuterar vi olika modeller för sjukförsäkring och beskriver särskilt den svenska modellen. Särskild uppmärksamhet tillägnas den så kallade avvecklingsfunktionen som är mycket central vad gäller att beräkna värdefunktionen för en sjukförsäkring.

Precis som för livförsäkring är en stor fråga att utjämna observerat skeende inom sjukförsäkringen. Vi observerar hur länge en insjuknad individ kvarstår som sjuk, i olika åldrar, och skattar avvecklingsfunktionen med den så kallade Kaplan-Meier-tekniken. Dessa skattningar utjämnar vi sedan med en summa av exponentialfunktioner som ger oss en analytisk form på avvecklingsfunktionen för respektive insjuknandeålder x som funktion av sjukdomsdurationen t .

Övrigt

I bokens kapitel 5 och 6 ges en kort introduktion till såväl parameterantaganden som återbäring och ändringsräkning. Dessa två kapitel är av mer översiktlig karaktär.

Till denna bok har också fogats övningar (med lösningar) som är knutna direkt till den teori som går igenom i respektive kapitel. Övningarna ges direkt i anslutning till respektive kapitel medan lösningarna till övningarna återfinns i en särskild bilaga.

För att ytterligare öka förståelsen för den relativt omfattande teorin, och hur den tillämpas i praktiken av livförsäkringsbolag, har ett särskilt avsnitt med laborationer bifogats. Dessa laborationer är i princip övningar på återgiven teori men kräver lite mer omfattande analys än de övningar som finns i samband med respektive kapitel. Laborationerna syftar också till att ge en inblick i hur utredningar av aktuariell (livförsäkringsmatematisk) natur kan genomföras i praktiken. Förslag till lösningar till laborationerna har inte getts.

Gunnar Andersson